Kapitel 5

5.1 a)

A	B	C	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \Rightarrow C$	$B \Rightarrow C$	$A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

b) $F \equiv \neg(A \wedge B) \vee C \equiv \neg A \vee \neg B \vee C$

$G \equiv \neg A \vee (\neg B \vee C)$

5.2 a) Die Junktoren $\Rightarrow$ und $\vee$ können folgendermaßen ersetzt werden:

$A \Rightarrow B \equiv \neg(A \wedge \neg B)$

$A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$

b)

$$\begin{aligned} F \downarrow G &\equiv \neg(F \vee G) \\ F \wedge G &\equiv (F \downarrow F) \downarrow (G \downarrow G) \\ F \vee G &\equiv (F \downarrow G) \downarrow (F \downarrow G) \\ \neg F &\equiv F \downarrow F \end{aligned}$$

5.3 Allgemeingültig sind a) und d).

5.4 Laut Definition … gilt für jede Interpretation $\mathcal{I}$: $\mathcal{I}(G_1 \wedge \ldots \wedge G_n) = 1$ genau dann, wenn $\mathcal{I}(G_i) = 1$ für alle $i = 1,\ldots,n$.

5.5 Ist $M' \subseteq M$, so gilt: Jede Interpretation, die alle Formeln aus M erfüllt, erfüllt erst recht alle Formeln aus M'. Sei nun $M' \models F$, das heißt: Jede Interpretation, die M' erfüllt, erfüllt auch F. Daraus folgt: Jede Interpretation, die M erfüllt, erfüllt auch F, also $M \models F$.

5.6 a) Es gilt: Jede Interpretation erfüllt die leere Menge {}. Also gilt $\{\} \models F$ genau dann, wenn jede Interpretation F erfüllt, und das ist genau dann der Fall, wenn F eine Tautologie ist.

b) Ist $F_1 \wedge \ldots \wedge F_n \Rightarrow G$ eine Tautologie, so erfüllt jede Interpretation die Formel $\neg F_1 \vee \ldots \vee \neg F_n \vee G$. Dann muss jede Interpretation, die alle F_i erfüllt, auch G erfüllen, das heißt, $\{F_1,\ldots,F_n\} \models G$.

Ist dagegen $F_1 \wedge \ldots \wedge F_n \Rightarrow G$ keine Tautologie, so gibt es eine Interpretation $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I}(\neg F_1 \vee \ldots \vee \neg F_n \vee G) = 0$. Dann ist $\mathcal{I}(\neg F_i) = 0$, also $\mathcal{I}(F_i) = 1$ für $i = 1,\ldots,n$, sowie $\mathcal{I}(G) = 0$. Dann ist $\{F_1,\ldots,F_n\} \models G$ falsch.

5.7 Selbstverständlich $A \wedge B \wedge C$.

5.8 a) Nach der Wahrheitstafelmethode:

KNF: $(A \vee B \vee C) \wedge (A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee C)$

DNF: $(\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C)$

b) Durch Umformungen:

KNF: $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee B \vee C)$

DNF: $(A \wedge C) \vee B$

5.9 Sei A ein Atom, das (positiv) in K_1 und negiert in K_2 vorkommt und sei $\mathcal{I}$ eine Interpretation, die K_1 und K_2 erfüllt.

Fall 1: $\mathcal{I}(A) = 1$. Da $\mathcal{I}$ K_2 erfüllt, aber nicht $\neg A$, muss $\mathcal{I}$ die Klausel $K_2 - \{\neg A\}$ erfüllen, also auch die Resolvente $R = (K_1 - \{A\}) \cup (K_2 - \{\neg A\})$.

Fall 2: $\mathcal{I}(A) = 0$. Da $\mathcal{I}$ K_1 erfüllt, aber nicht A, muss $\mathcal{I}$ die Klausel $K_1 - \{A\}$ erfüllen, also auch die Resolvente $R = (K_1 - \{A\}) \cup (K_2 - \{\neg A\})$.

5.10 Für alle Teilaufgaben sei $\mathcal{I}$ eine Interpretation.

a) Die Behauptung ist wahr: Aus $\mathcal{I}(A) = 1$ und $\mathcal{I}(B) = 1$ folgt $\mathcal{I}(A \wedge B) = 1$.

b) Die Behauptung ist wahr: Sei (1) $\mathcal{I}(A \vee B) = 1$ und (2) $\mathcal{I}(A \Rightarrow B) = \mathcal{I}(\neg A \vee B) = 1$.
Fall 1: $\mathcal{I}(A) = 1$. Dann folgt aus (2) $\mathcal{I}(B) = 1$.
Fall 2: $\mathcal{I}(A) = 0$. Dann folgt aus (1) $\mathcal{I}(B) = 1$.

c) Die Behauptung ist falsch: Sei $\mathcal{I}(A) = 0$ und $\mathcal{I}(B) = 1$. Dann ist I ein Modell für $\{A \Rightarrow B, \neg A\}$, aber $I(\neg B) = 0$.

d) Die Behauptung ist wahr: Sei (1) $\mathcal{I}(A) = 1$, (2) $\mathcal{I}(C \Rightarrow B) = \mathcal{I}(\neg C \vee B) = 1$ und (3) $\mathcal{I}(\neg(A \wedge B)) = \mathcal{I}(\neg A \vee \neg B) = 1$. Aus (1) und (3) folgt (4) $\mathcal{I}(B) = 0$ und aus (4) und (2) folgt $\mathcal{I}(C) = 0$, also $\mathcal{I}(\neg C) = 1$.

5.11 Sei M eine Klauselmenge, die keine rein negative Klausel enthält. Dann enthält jede Klausel von M (mindestens) ein positives Literal. Die Interpretation, die alle Atome erfüllt, erfüllt auch M.

5.12 Folgende Klauseln können abgeleitet werden:

$$\{A, B\}, \{A, C, E\}, \{B, C, \neg D, E\}, \{\neg C, \neg D, E\}, \{\neg B, \neg D, E\}, \{A, \neg D, E\},$$

$$\{B, \neg D, E\}, \{C, \neg D, E\}, \{\neg D, E\}, \{A, E\}, \{A, C, \neg D, E\}, \{A, B, \neg D, E\}$$

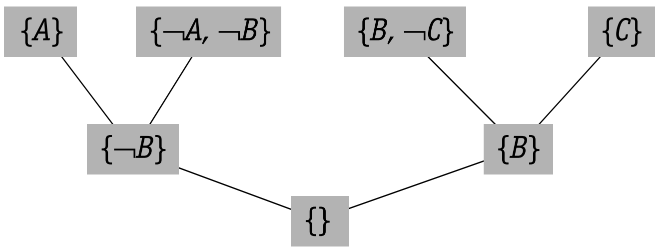
5.13 a) Formel negieren ergibt:

$$A \wedge (\neg A \vee \neg B) \wedge (B \vee \neg C) \wedge C$$

b) Klauselmenge:

$$\{\{A\}, \{\neg A, \neg B\}, \{B, \neg C\}, \{C\}\}$$

c) Eine mögliche Resolutionsableitung der leeren Klausel:



5.14 $g(x,y)$ soll heißen: x ist größer als y. Die Personen werden jeweils durch den Anfangsbuchstaben des Vornamens abgekürzt.

a) $g(c,p)$

b) $g(p, a) \Rightarrow \neg g(a, p)$

c) $\forall x(g(x, c) \Rightarrow g(x, p))$

d) $\neg \exists x(g(x, t))$

e) Um diese Aussage formulieren zu können, benötigt man das Symbol für Gleichheit (=): $\forall x(\neg(x = t) \Rightarrow g(t, x))$

5.15 Ja, sie besagen dasselbe.

„Niemand ist größer als Thomas“ ist $\neg\exists x(g(x, t))$. Es gilt:

$$\neg\exists x(g(x, t)) \equiv \forall x(\neg g(x, t))$$

und das bedeutet: „Jeder ist nicht größer als Thomas“, und das ist dasselbe wie „Jeder ist kleiner oder gleich groß wie Thomas“.

5.16 a) $\forall x, \forall y(P(x, y) \Rightarrow P(y, x))$

b) $\forall x, \forall y, \forall z(P(x, y) \wedge P(y, z) \Rightarrow P(x, z))$

c) $\forall x(P(x, x))$

5.17 a) erfüllt

b) nicht erfüllt

c) erfüllt

5.18 a) zur Notation (n,k) siehe Lösung zu Aufgabe 5.20.

	(n,k)	Ungelöst	Gelöst
	(2,4)	$f(x, g(x)) \approx f(g(a), y)$	–
D	(2,2)	$x \approx g(a), g(x) \approx y$	–
E	(1,2)	$g(g(a)) \approx y$	$x \leftarrow g(a)$
E	(0,0)	–	$x \leftarrow g(a), y \leftarrow g(g(a))$

b)

	(n,k)	Ungelöst	Gelöst
	(3,5)	$f(x, y, z) \approx f(g(y, y), g(z, z), g(a, a))$	–
D	(3,3)	$x \approx g(y, y), y \approx g(z, z), z \approx g(a, a)$	
E	(2,2)	$y \approx g(z, z), z \approx g(a, a)$	$x \leftarrow g(y, y)$
E	(1,1)	$z \approx g(a, a)$	$x \leftarrow g(g(z, z), g(z, z)), y \leftarrow g(z, z)$
E	(0,0)		$x \leftarrow g(g(g(a, a), g(a, a)), g(g(a, a), g(a, a))),$ $y \leftarrow g(g(a, a), g(a, a)), z \leftarrow g(a, a)$

c)

	(n,k)	Ungelöst	Gelöst
	(2,4)	$f(x, g(x)) \approx f(g(y), y)$	–
D	(2,2)	$x \approx g(y), g(x) \approx y$	–
E	(1,3)	$g(g(g(y))) \approx y$	$x \leftarrow g(y)$
E		unlösbar	–

5.19 analog 5.18 b) mit n Variablen.

5.20 Wir ordnen der Liste *ungelöst* das Paar $(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ zu. Dabei ist n die Anzahl der in den Termen vorkommenden verschiedenen Variablen, und k ist die Gesamtanzahl der Funktionssymbole, die in Termen der Liste *ungelöst* vorkommen. Beispiele für (n,k) sind in der Lösung zu Aufgabe 5.18 dargestellt.

Die Ordnung auf Paaren der Form (n,k) ist die lexikografische Ordnung, das heißt:

$$(n_1, k_1) < (n_2, k_2) \text{ gdw. } n_1 < n_2 \vee (n_1 = n_2 \wedge k_1 < k_2)$$

Jede Kette der Form $(n_1, k_1) > (n_2, k_2) > (n_3, k_3) > \ldots$ muss irgendwann terminieren, wie man sich leicht überlegt.

- Jeder *Einsetzungsschritt* des Unifikationsalgorithmus vermindert die Zahl n der Variablen in *ungelöst*.
- Jeder *Dekompositionsschritt* des Unifikationsalgorithmus belässt die Zahl n der Variablen und vermindert die Gesamtanzahl k der der Funktionssymbole in *ungelöst*.

Also terminiert der Unifikationsalgorithmus.

5.21 Sorry, da hat sich ein Tippfehler eingeschlichen. So wie die Klauselmenge dasteht, kann man sie gar nicht widerlegen. Es musste heißen:

$$\{\{P(x), \neg Q(x, y)\}, \{\neg P(a)\}, \{\neg P(b)\}, \{Q(a, c), Q(b, c)\}\}$$

Eine mögliche Resolutionswiderlegung: